Egzamin Wstępny na Studia Doktoranckie w roku 2002

Egzamin składał się z czterech grup zadań. Przy ustalaniu oceny końcowej odrzucało się najsłabiej ocenioną grupę zadań, o czym kandydaci byli poinformowani. Egzamin trwał 180 minut.

Grupa A (analiza)

1. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że pochodne cząstkowe $\frac{\partial}{\partial x_1} f, \frac{\partial}{\partial x_2} f$ istnieją i są wspólnie ograniczone. Czy f jest ciągła ?

2. Niech V będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $C(\overline{\mathbb{D}})$ (funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych na $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$) spełniającą warunek

$$(\forall F \in V)(\sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |F(z)| = \sup_{x \in \partial\mathbb{D}} |F(x)|),$$

gdzie $\partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$.
(a) Udowodnić, że dla $F, G \in V$ mamy

$$F = G \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } F \restriction_{\partial\mathbb{D}} = G \restriction_{\partial\mathbb{D}}.$$

(b) Niech $W = \{f \in C(\partial\mathbb{D}) : (\exists F \in V)(f = F \restriction_{\partial\mathbb{D}})\}$ będzie podprzestrzenią przestrzeni funkcji ciągłych na $\partial\mathbb{D}$ z normą supremum. Wykazać, że dla każdego $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ przyporządkowanie

$$W \ni f \mapsto F(z),$$

gdzie $f = F \restriction_{\partial\mathbb{D}}$, $F \in V$ jest dobrze określonym ograniczonym funkcjonałem liniowym na W.
(c) Stosując twierdzenia analizy funkcjonalnej uzasadnić, że dla każdego $z \in \mathbb{D}$ istnieje miara borelowska μ_z na $\partial\mathbb{D}$ taka, że dla każdego $F \in V$ mamy

$$F(z) = \int_{\partial\mathbb{D}} F(x) d\mu_z(x).$$

Grupa B (geometria i topologia)

1. Jaka jest maksymalna pojemność prostopadłościennego pudełka bez przykrywki (tj. bez ścianki górnej) o ustalonej całkowitej powierzchni ścian bocznych i denka 300 cm^2 ? Jakie wymiary może mieć takie pudełko o maksymalnej pojemności ?

2. Średnicą podzbioru X płaszczyzny nazywamy liczbę $diam(X) = \sup_{x,y \in X} d(x, y)$, gdzie d jest odległością punktów na płaszczyźnie. Uzasadnić, że:
(a) Każdy zbiór ograniczony X ma skończoną średnicę.
(b) Jeśli X jest domknięty i ograniczony, to istnieją punkty $x_1, x_2 \in X$ takie, że $diam(X) = d(x_1, x_2)$.
(c) Jeśli średnica zbioru X wynosi d, to średnica jego domknięcia $cl(X)$ też wynosi

d.
(d) Jeśli $diam(X) = D$, to istnieje koło o promieniu $R = D\sqrt{3}/2$ zawierające zbiór X.

Grupa C (rachunek prawdopodobieństwa)

1. Dwie urny zawierają odpowiednio m_1 i m_2 białych oraz n_1 i n_2 czarnych kul. Z każdej urny wylosowano po jednej kuli, a potem wybrano losowo jedną z tych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kula ta jest biała ?

2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej. Udowodnić, że dla każdego $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{1}{n}\max_{1\le k\le n}|X_k| > \epsilon\right) = 0.$$

Grupa D (algebra i wstęp do matematyki)

1. Czy grupa izometrii własnych kwadratu jest izomorficzna z pewną podgrupą grupy izometrii własnych czworościanu foremnego ? (odp. uzasadnić)

2. Czy istnieje relacja równoważności E na zbiorze $\mathbb{R}$ taka, że E ma nieprzeliczalnie wiele klas abstrakcji i każda klasa abstrakcji E też jest nieprzeliczalna ? (odp. uzasadnić)