Egzamin kwalifikacyjny na studia doktoranckie matematyki

10.06.2005

Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 6 punktów. Spośród poniższych 10 zadań do oceny będzie branych pod uwagę tylko 6 najlepiej rozwiązanych.

1. Dla $x \in \mathbb{R}$ niech $\{x\}$ oznacza część ułamkową x, tj. $\{x\} = x - [x]$. Zdefiniujmy

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{nx\}}{2^n}.$$

a) Wykaż, że $f(x)$ jest dobrze określoną funkcją okresową ograniczoną.

b) Udowodnij, że f jest całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[a, b]$, $a < b$; $a, b \in \mathbb{R}$.

c) Udowodnij, że dla każdej liczby niewymiernej x_0 funkcja f jest ciągła w x_0.

d) Udowodnij, że f nie jest ciągła w punkcie $x_0 = \frac{1}{2}$.

e) Wykaż, że zbiór liczb niewymiernych jest dokładnie zbiorem ciągłości funkcji f.

2. Znajdź wszystkie pary liczb dodatnich α, β dla których całka

$$\iint_{(0,1)\times(0,1)} \frac{xy}{x^{\alpha} + y^{\beta}}\, dx\, dy$$

jest zbieżna.

Wskazówka: Pomocne może być oszacowanie funkcji podcałkowej w zależności od składnika dominującego w mianowniku, a następnie podział obszaru całkowania na dwa obszary wyznaczone przez to oszacowanie.

3. Niech X będzie ustalonym zbiorem i niech $\Delta = \{(x, x) : \ x \in X\}$ będzie przekątną w iloczynie kartezjańskim $X \times X$.

(a) Udowodnić, że jeżeli $|X| \leq \mathfrak{c}$, to istnieją zbiory $A_{n,k} \subseteq X$, takie że

$$\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{n,k} \times A_{n,k}).$$

(b) Wykazać, że zachodzi twierdzenie odwrotne: jeżeli Δ daje się zapisać w powyższy sposób to moc zbioru X nie przekracza continuum.

4. Niech przestrzeń $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ będzie wyposażona w topologię produktową.

(a) Niech F będzie domkniętym podzbiorem X. Udowodnić, że F jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg $(r_n)_n$ liczb rzeczywistych, taki że dla każdego $x = (x_n)_n \in F$ mamy $|x_n| \leq r_n$ dla wszystkich liczb naturalnych n.

(b) Udowodnić, że przestrzeń X nie jest przeliczalną sumą swoich zwartych podprzestrzeni.

5. Wykaż, że każda skończona grupa z mnożeniem liczb zespolonych jest cykliczna.

6. Uzasadnij, że macierz dowolnego niezerowego minora ustalonej macierzy A zawiera się w macierzy niezerowego minora stopnia równego rzędowi A.

7. Uzasadnij bezpośrednio (bez powoływania się na gotowe silne twierdzenia), że jeśli A jest wypukłym podzbiorem płaszczyzny, zaś punkt p nie leży we wnętrzu A, to istnieje prosta L przechodząca przez punkt p taka, że A zawiera się w jednej z półpłaszczyzn wyznaczonych przez L.

8. Archeolog ma podzielić znalezione na cmentarzysku czaszki na męskie i żeńskie. Wiadomo, że obwód czaszki męskiej ma z dobrym przybliżeniem rozkład normalny o średniej 57 cm i odchyleniu standardowym 4 cm natomiast obwód czaszki żeńskiej ma rozkład normalny ze średnią 54 cm i odchyleniem standardowym 3 cm.

Jak klasyfikować czaszki przy założeniu, że koszty błędnych decyzji obydwu rodzajów są jednakowe, a czaszki obu płci znajdowane są jednakowo często? Podaj regułę decyzyjną minimalizującą ryzyko, czyli całkowitą średnią stratę.

9. Niech X_1, X_2, ..., X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Oznaczmy przez $X_{1:n}$ oraz $X_{n:n}$, zmienne losowe zdefiniowane odpowiednio jako:

$$X_{1:n}(\omega) = \min\left(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right),$$

$$X_{n:n}(\omega) = \max\left(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega)\right).$$

(i) Wyznacz rozkład zmiennej losowej Z zdefiniowanej jako

$$Z = \max\left(X_{1:2},\, X_{2:2} - X_{1:2},\, 1 - X_{2:2}\right).$$

(ii) Wyznacz $EX_{1:n}$ oraz $EX_{n:n}$.

(iii) Czy istnieje niezdegenerowana zmienna losowa X taka, że ciąg $\{nX_{1:n}\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny według rozkładu do X?

10. Wyobraźmy sobie zbiór $N+1$ urn, z których każda zawiera N kul. Urna k zawiera k kul czerwonych i $N-k$ kul białych, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$. Wybrano przypadkowo jedną z urn i dokonano z niej n przypadkowych ciągnięć, przy czym za każdym razem wyciągniętą kulę zwracano do urny. Przypuśćmy, że wszystkie n kul okazały się czerwone.

(i) Jakie jest prawdopodobieństwo, że następne ciągnienie z tej samej urny da znów kulę czerwoną?

(ii) Oszacuj prawdopodobieństwo otrzymane w punkcie (i) w sytuacji, gdy N jest bardzo duże.